1(1982), 3, 217~221

红外研究
Chin.J.IR Res.

关于CCD成象器件MTF的讨论

顾 天 柱

(中国科学院上海技术物理研究所)

摘要——本文提出增广采样系统的假设，严格导出了CCD成象器件调制传递函数MTF_1的计算式，并就某些文献的观点作了讨论。

一、引 言

Nelson R. D. 和 Waters W. P.[1] 首次提出与器件光敏面几何性质有关的CCD成象器件的调制传递函数(MTF_1)的计算公式。对于面元宽度为a、相邻面元中心距为b的CCD线阵，沿线阵方向的MTF_1为:

$$MTF_1=\frac{\sin(\pi f a)}{\pi f a}, \tag{1}$$

式中f为沿线阵方向景物的空间频率。为下文叙述方便，将式(1)称为Nelson算式。文献[1]中没有给出此式的推导方法和过程。此后有不少文献直接引用了这一式[2][3][4]，也有些在引用时给出了推导方法或过程[5][6]。

文献[5]认为，"MTF_1由基本积分单元的傅里叶变换给出，"因为基本积分单元(CCD线阵中的一个光敏面元)是矩形的，故其傅里叶变换为sinc函数。这一推导缺少物理内容。

文献[6]给出了较为详细的推导过程，其主要步骤见附录。这一推导存在着一些问题，其中之一正如张守一等[7]指出的，推导中没有考虑输入信号初相位φ角的影响。文献[7]认为，如果考虑这一影响，就应在Nelson算式中增加一项修正因子。

作者认为不应加入这项修正因子。这是因为在文献[6]的推导过程中，除了文献[7]指出的问题外，还需要考虑两个问题，其一，对于如CCD成象器件那样的采样器件来说，调制传递函数的含义是什么？其二，推导过程中所用的输出量仅是线阵中某一个单元的输出，能否代表整个线阵的输出？如果正确考虑所有这三个问题，就可严格导出Nelson算式。

二、Nelson算式的导出

传递函数的概念一般只能用于描述线性系统的性质。CCD成象器件是一种采样器件，采样的结果使景物的频谱周期延拓而加入新的谱成分。这种器件不是线性系统，不能用调制传递函数的概念来描述其性能。

本文1981年8月10日收到。修改稿1982年1月4日收到。

若在采样频率为 f_s 的采样器前后分别加上一个截止频率 $f_c=\frac{1}{2}f_s$ 的理想低通滤波器，作为保护滤波器和恢复滤波器，而构成一个增广采样系统，相应的成象系统称为增广采样成象系统，可以证明，增广采样系统为一线性系统。对于理想采样的情况，这一点是采样定理的直接结果。故有理由假设：CCD 成象器件的调制传递函数是对其增广采样成象系统而言的。

在 CCD 成象系统中采用恢复滤波器是一种常用手段。至于保护滤波器对于光学系统来说当然是很难加入的，但如果输入信号为窄带信号，那末就可在系统中取消这一滤波器而不失其线性性。如果输入信号不满足窄带条件，那末没有保护滤波器将会产生折迭失真而使传递函数的计算失去意义，理论上加入这一滤波器将使传递函数的计算成为可能。

在这一假设下可以导出 Nelson 算式。

以 x 方向为线阵方向，线阵单元在 x 方向的线度为 a，在 x 方向单元的中心距为 b。以 I、I_{res}、I_{sam}、I_{out} 分别表示增广系统的输入值、保护滤波后的值、采样后的值及输出值，并用后跟括号中是 x 还是 f 来区分其为空域量还是频域量。这样，系统的采样频率 f_s 就为：

$$f_s=\frac{1}{b}, \tag{2}$$

保护滤波器和恢复滤波器的截止频率 f_c 为：

$$f_c=\frac{1}{2b}。 \tag{3}$$

有限面元的采样作用是一种非理想采样，它表现为以面元中心位置为标志的平均值，这也称为"孔径数平作用"。如果线阵足够长，采样后的输出在数学上可表示为：

$$I_{sam}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\int_{nb-\frac{a}{2}}^{nb+\frac{a}{2}} I_{res}(x)dx\right)\cdot\delta(x-nb), \tag{4}$$

利用 δ 函数的取样性质可对式(4)作如下变化：

$$\begin{aligned}I_{sam}(x)&=\left[\frac{1}{a}\int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} I_{res}(t)dt\right]\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nb)\\&=\left[\frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} I_{res}(x-t)dt\right]\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nb)\\&=\left[\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{a}\right)I_{res}(x-t)dt\right]\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nb)\\&=\left[\frac{1}{a}I_{res}(x)*\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nb)。\end{aligned} \tag{5}$$

从式(5)可见，带有"孔径数平作用"的采样相当于将被采样信号先经过一冲激响应为 $\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$ 的线性系统后再进行理想采样。故包含"孔径数平作用"采样器在内的增广采样成象系统是一个线性系统，可以采用调制传递函数的概念。

对式(5)两边作傅里叶变换得：

$$\begin{aligned}I_{sam}(f)&=[I_{res}(f)\cdot\mathrm{sinc}(af)]*\frac{1}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{b}\right)\\&=\frac{1}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}I_{res}\left(f-\frac{n}{b}\right)\mathrm{sinc}\left(af-\frac{na}{b}\right),\end{aligned} \tag{6}$$

其中，

$$I_{res}(f)=I(f)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)=I(f)\cdot\mathrm{rect}(bf)。\tag{7}$$

I_{sam} 经过恢复滤波后的值 I_{out} 为：

$$I_{out}(f)=I_{sam}(f)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)=I_{sam}(f)\cdot\mathrm{rect}(bf),\tag{8}$$

因而有：

$$\begin{aligned}I_{out}(f)&=\left\{\frac{1}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}I\left(f-\frac{n}{b}\right)\cdot\mathrm{rect}(bf-n)\cdot\mathrm{sinc}\left(af-\frac{na}{b}\right)\right\}\cdot\mathrm{rect}(bf)\\&=\frac{1}{b}I(f)\cdot\mathrm{sinc}(af)\cdot\mathrm{rect}(bf)。\end{aligned}\tag{9}$$

频响函数 $H(f)$ 为在频域的输入输出之比：

$$H(f)=\frac{I_{out}(f)}{I(f)}=\frac{1}{b}\,\mathrm{sinc}(af)\cdot\mathrm{rect}(bf),\tag{10}$$

光学传递函数 OTF 为系统频响函数的归一化值，调制传递函数 MTF 为 OTF 的振幅：

$$\mathrm{MTF}=\left|\frac{H(f)}{H(0)}\right|=\mathrm{sinc}(af)\cdot\mathrm{rect}(bf),\tag{11}$$

在信号的窄带范围，即当 $f\leqslant\frac{1}{2b}$ 时，由式(11)可得：

$$\mathrm{MTF}=\mathrm{sinc}(af)=\frac{\sin(\pi af)}{\pi af}。\tag{12}$$

三、讨　　论

文献[6]和文献[7]是从 MTF 的另一定义出发来推导的。这一定义规定，系统的 MTF 是输入和输出正弦信号的调制度的比值。调制度 M 定义为：

$$M=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}。\tag{13}$$

作者认为，这一定义与本文第二节推导中所采用的“MTF 是系统频响函数的归一化模”的定义是完全等价的，应该导出相同的结果。为说明这一点，这里从式(13)出发再作推导如下。

设输入正弦光栅信号为：

$$I(x)=1+m\cos(2\pi f_0x+\varphi),\tag{14}$$

频率 f_0 为满足 $f_0\leqslant\frac{1}{2b}$ 的任意值。由于对增广采样系统的规定及这里对输入信号的假定，使得

$$I_{res}(x)=I(x)=1+m\cos(2\pi f_0x+\varphi),\tag{15}$$

再由式(4)可得：

$$I_{sam}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{a}\int_{nb-\frac{a}{2}}^{nb+\frac{a}{2}}[1+m\cos(2\pi f_0x+\varphi)]dx\right]\cdot\delta(x-nb),$$

将括号中的积分求出，化简后可得：

$$I_{sam}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[1+m\,\mathrm{sinc}(f_0a)\cdot\cos(2\pi f_0\cdot nb+\varphi)]\cdot\delta(x-nb)。$$

又因为

$$I_{out}(x)=I_{sam}(x)*\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{b}\right), \tag{17}$$

故有

$$\begin{aligned}I_{out}(x)&=\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}[1+m\operatorname{sinc}(f_0a)\cdot\cos(2\pi f_0\cdot nb+\varphi)]\cdot\delta(x-nb)\right\}*\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[1+m\operatorname{sinc}(f_0a)\cdot\cos(2\pi f_0\cdot nb+\varphi)]\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{b}-n\right),\end{aligned} \tag{18}$$

根据采样定理,从式(18)可得:

$$I_{out}(x)=1+m\operatorname{sinc}(f_0a)\cos(2\pi f_0x+\varphi)。 \tag{19}$$

应该注意到式(19)与文献[7]中所得到的类似表达式有本质的不同,式(19)中的 x 是一个连续变量,因此可以方便地求得 $I_{out}(x)$ 的极大值和极小值为:

$$[I_{out}(x)]_{\max}=1+m\operatorname{sinc}(f_0a), \tag{20}$$

$$[I_{out}(x)]_{\min}=1-m\operatorname{sinc}(f_0a), \tag{21}$$

从而求得输出端信号调制度 M_{out} 为:

$$M_{out}=m\cdot\operatorname{sinc}(f_0a), \tag{22}$$

已知输入端信号调制度 M_{in} 为:

$$M_{in}=m, \tag{23}$$

故有

$$\mathrm{MTF}=\frac{M_{out}}{M_{in}}=\operatorname{sinc}(f_0a)。 \tag{24}$$

由于 f_0 是任选的,故式(24)即为 Nelson 算式,而不出现任何修正因子。

四、结　　论

1. CCD 成象器件是一种采样器件,它不是线性系统,不适于用传递函数的概念来描述其特性。

2. 包括 CCD 成象器件在内的增广采样成象系统是线性系统,可以用传递函数的概念来描述其特性。

3. 考虑到 CCD 成象器件的几何性质(孔径的敉平作用),在线阵方向,增广采样成象系统的调制传递函数可用式(11)来计算。对于窄带信号,式(11)与 Nelson 算式完全一样。

4. 对于窄带信号,式(11)的结果也与瞬时视场同 CCD 单元线度一样的(具有同样孔径的)卷积成象系统的调制传递函数完全一样。这正说明对于窄带信号,增广采样成象系统可以完全代替卷积成象系统而不损失任何信息。

附　　录

取 x 方向为线阵方向,线阵中某一单元的中心位置为 x_0,其线度为 $a=x_2-x_1$。设 x 方向的图象亮度分布 $I(x)$为:

$$I(x)=1+m\cos2\pi fx, \tag{A1}$$

m:为原始信号的调制度。在该单元上获得的信号 $I_{meas}(x_0)$为:

$$I_{meas}(x_0)=\frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2} I(x)dx,$$

$$I_{meas}(x_0)=\frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2}[1+m\cos 2\pi fx]dx$$

$$=1+\left[\frac{\sin\pi fa}{\pi fa}\cdot m\right]\cdot\cos 2\pi fx_0, \tag{A2}$$

式(A2)中方括号内的部分为获得的信号的调制度。调制传递函数被定义为取样后调制度对于原信号调制度的比值，故有：

$$\mathrm{MTF}=\frac{\sin\pi fa}{\pi fa}。$$

参 考 文 献

[1] Nelson R. D. and Waters W. P., *CCD Applications Conf. Proc.*, 1973.

[2] Barbe D. F., *Proc. IEEE.* **63** (1975), 1.

[3] Howes M. T. and Morgan D. V., *Charge-Coupled Device and System*, John Wiley Sons, 1979.

[4] Hobson G. S., *Charge-Transfer Devices*, Edward Arnold, 1978.

[5] Barbe D. F. and White W. H., *CCD Applications Conf. Proc.*, 1973.

[6] Eliot F. C., *IEEE. Trans. Electron Devices*, **ED-21** (1974), 10.

[7] 张守一，尹仲任，红外研究，**1** (1982), 1, 45～52.

A DISCUSSION ON THE MTF OF THE CCD IMAGING DEVICE

GU TIANZHU

(Shanghai Institute of Technical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

A hypothesis of the generalized sampling system is presented in this paper. The formula of calculating MTF_I of the CCD imaging device is strictly derived, while the problems in some references are discussed.