

一种新的高次边缘元方法*

徐善驾 盛新庆

(中国科学技术大学电子工程与信息科学系, 安徽, 合肥, 230026)

Masanori Koshiba

(Department of Electronic Engineering, Hokkaido University, Sapporo, 060 Japan)

摘要 讨论了一种新的高次边缘元方法, 它不仅消除了伪解, 并具有简单高效的特点. 着重研究了二次边缘元的空间构造; 给出了有关计算公式. 对具有精确解的条形介质填充波导主模和高次模本征值的计算表明: 二次边缘元方法的计算精度比一次边缘元提高约一个数量级. 块状介质填充和衬底各向异性的微带线主模色散曲线的计算证实了该方法的精确性和广泛的适用性.

关键词 有限元, 高次边缘元, 各向异性, 色散特性.

引言

全磁场矢量泛函是一种适用面很广的泛函形式, 能求解包括各向异性介质填充的各种复杂导波结构的传输问题^[1~3]; 但是, 它的计算结果中包含了一系列不易辨别的伪解. 如何消除这些伪解是近年来国际上关注的难题.

文献 [4] 提出了一种新型的有限元方法, 即一次边缘元法, 比较好地解决了这个问题, 但这种边缘元的单元插值函数是一次的, 因而计算效率不高, 特别是在计算复杂或各向异性介质导波结构时, 为了保证计算精度, 节点数高达 700~800 个, 其中边缘节点数也不小于 400~500 个. 在我国目前高速计算机尚不普及的情况下; 这种巨大的计算量和计算机内存的要求影响了它的推广和应用. 本文提出一种二次边缘元方法; 着重讨论了它的空间构造, 通过对若干不同导波结构色散特性的计算, 证明该方法不仅适应面广, 计算精度高, 而且具有比一次边缘元高得多的计算效率.

1 高次边缘元分析

众所周知, 波导本征值问题可归结为多种形式泛函的变分问题. 国内外学者的实践证

* 国家自然科学基金资助项目

本文 1993 年 10 月 11 日收到, 修改稿 1994 年 3 月 25 日收到

明, 下列全磁场矢量泛函表达式不仅适用面广, 可以计算各向异性电介质和磁介质填充的导波结构的本征值问题, 而且能获得较高的计算效率^[1].

$$F(\vec{H}) = \iint_{\Omega} [(\nabla \times \vec{H}^*) \cdot ([p]\nabla \times \vec{H}) - k_0^2[q]\vec{H}^* \cdot \vec{H}] dx dy, \quad (1)$$

式(1)中

$$[p] = \begin{bmatrix} p_x & 0 \\ 0 & p_y \\ 0 & p_z \end{bmatrix}, \quad p_x = \frac{1}{\epsilon_{rx}}, \quad p_y = \frac{1}{\epsilon_{ry}}, \quad p_z = \frac{1}{\epsilon_{rz}};$$

$$[q] = \begin{bmatrix} q_x & 0 \\ 0 & q_y \\ 0 & q_z \end{bmatrix}, \quad q_x = \mu_{rx}, \quad q_y = \mu_{ry}, \quad q_z = \mu_{rz};$$

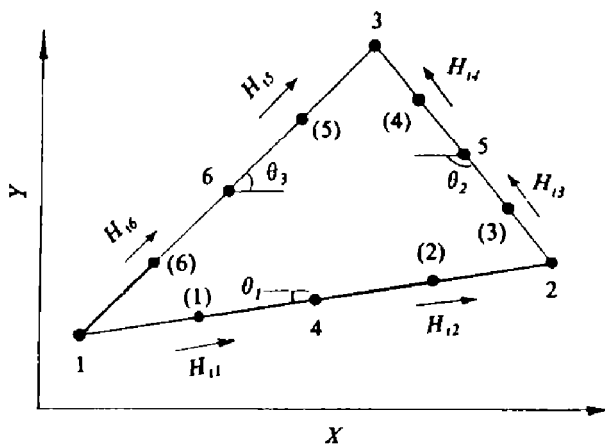


图 1 二次边缘元单元插值

Fig. 1 The second-order edge element

用有限元方法求解上述泛函变分问题时, 首先必须准确、合理地构造有限元空间. 高次边缘元方法在空间构造上与常规有限元方法有根本的差别. 由于采用了全磁场矢量的泛函表达式, 因此在常规有限元分析中, 每个节点有 3 个自由度. 对于二阶元, 每个三角形单元共有 6 个节点, 此时单元刚度矩阵应该是 18×18 的方阵. 在二次边缘元单元 (见图 1) 的分析中, 对于未知函数 H_z 我们仍然用角点 1~3 和边缘中点 4~6 来表示. 在二次插值的情况下有

$$H_z^e = \sum_{i=1}^6 N_i^e H_{zi}^e,$$

其中 N_i^e 是三角形单元内的形函数, 其具体表达式见文献 [5]. 但是, 对于单元未知函数 H_x, H_y 则是用 6 个边缘三等分点 ((1) ~ (6)) 的边缘切向分量 H_{ti} ($i=1, 2, \dots, 6$) 插值得到, 它与常规的二次有限元方法相比要少 6 个插值. 这样在二次边缘元中, 单元内的未知磁场矢量 \vec{H} 只用 12 个未知数; 而在常规二次元中有 18 个未知数, 无疑这对提高计算效率有重要的意义. 但需要指出的是, 因为仅用 6 个未知数同时插值 H_x, H_y , 所以 H_x, H_y 插值形式不是唯一的. 这正是边缘元空间构造上不同于常规有限元的主要特征. 我们的实践表明, 采用下面多项式形式来表示 H_x 和 H_y 能得到比较好的计算结果:

$$\left. \begin{aligned} H_x^e &= a + cx + dy + ex^2 + fy^2, \\ H_y^e &= b + dx - cy - fx^2 - ey^2; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这样选取的结果能使 H_x, H_y 的一次项满足 $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, 而这个条件一般认为是消除伪解所必须的; 另外, 这种插值形式使得 H_x 和 H_y 的一次项在相邻单元的边界上是连续的,

从而保证了边缘元解的收敛性. 可以证明下面表达式成立:

$$H_x^e = \sum_{i=1}^6 \varphi_i^e H_{ti}^e, \quad (3)$$

$$H_y^e = \sum_{i=1}^6 \psi_i^e H_{ti}^e, \quad (4)$$

式中

$$\varphi_i^e = (D_{i1} + D_{i3}x + D_{i4}y + D_{i5}x^2 + D_{i6}y^2) / \det A,$$

$$\psi_i^e = (D_{i2} + D_{i4}x - D_{i3}y + D_{i6}x^2 - D_{i5}y^2) / \det A,$$

其中 D_{ij} 是下面行列式 A 的 i 行, j 列的代数余子式.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & x_1 \cos \theta_1 - y_1 \sin \theta_1 & x_1 \sin \theta_1 + y_1 \cos \theta_1 & x_1^2 \cos \theta_1 - y_1^2 \sin \theta_1 & -x_1^2 \sin \theta_1 + y_1^2 \cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & x_2 \cos \theta_1 - y_2 \sin \theta_1 & x_2 \sin \theta_1 + y_2 \cos \theta_1 & x_2^2 \cos \theta_1 - y_2^2 \sin \theta_1 & -x_2^2 \sin \theta_1 + y_2^2 \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & x_3 \cos \theta_2 - y_3 \sin \theta_2 & x_3 \sin \theta_2 + y_3 \cos \theta_2 & x_3^2 \cos \theta_2 - y_3^2 \sin \theta_2 & -x_3^2 \sin \theta_2 + y_3^2 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & x_4 \cos \theta_2 - y_4 \sin \theta_2 & x_4 \sin \theta_2 + y_4 \cos \theta_2 & x_4^2 \cos \theta_2 - y_4^2 \sin \theta_2 & -x_4^2 \sin \theta_2 + y_4^2 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & x_5 \cos \theta_3 - y_5 \sin \theta_3 & x_5 \sin \theta_3 + y_5 \cos \theta_3 & x_5^2 \cos \theta_3 - y_5^2 \sin \theta_3 & -x_5^2 \sin \theta_3 + y_5^2 \cos \theta_3 \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & x_6 \cos \theta_3 - y_6 \sin \theta_3 & x_6 \sin \theta_3 + y_6 \cos \theta_3 & x_6^2 \cos \theta_3 - y_6^2 \sin \theta_3 & -x_6^2 \sin \theta_3 + y_6^2 \cos \theta_3 \end{bmatrix}$$

将式 (2)、(3) 和 (4) 代入式 (1), 得到广义代数本征值方程:

$$[K](\varphi) - k_0^2[M](\varphi) = (0), \quad (5)$$

其中

$$(\varphi) = \begin{bmatrix} (H_t) \\ (H_z) \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{tt}] & [K_{tz}] \\ [K_{zt}] & [K_{zz}] \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} [M_{tt}] & [0] \\ [0] & [M_{zz}] \end{bmatrix},$$

$$[K_{tt}] = \sum_e \iint_e \left\{ p_x \beta^2(\psi)(\psi)^T + p_y \beta^2(\varphi)(\varphi)^T + p_z [(\psi_x) - (\varphi_y)][(\psi_x) - (\varphi_y)]^T \right\} dx dy,$$

这里矩阵 $[K_{tz}] = [K_{zt}]^T$, $[K_{zz}]$, $[M_{tt}]$ 和 $[M_{zz}]$ 同文献 [4] 有相同的表达式.

2 计算实例

为了检验本方法的精确性、适用性和高效性, 我们计算了条形介质填充波导 (见图 2)、块状介质填充矩形波导 (见图 3) 和衬底基片为各向异性介质的微带线 (见图 4) 等几种波导结构的色散特性. 表 1 给出了在边缘节点数 N_s (即最终代数广义本征值问题的阶数) 相近的情况下, 用二次元和一次元计算部分介质填充矩形波导中前 3 个模的本征值的理论值

表 1 条形介质填充矩形波导本征值的理论值与边缘元计算值的比较
Table 1 A comparison between theoretical and calculated results of the eigenvalues of slab-loaded rectangular waveguide

本征模	理论值	二次边缘元 ($N_s=86$)		一次边缘元 ($N_s=85$)	
		计算值	偏差 (%)	计算值	偏差 (%)
LSE ₁₀	1.88491	1.88475	0.008	1.93163	2.5
LSE ₁₁	6.26244	6.25170	0.17	6.55681	4.7
LSE ₂₀	6.37995	6.51289	1.0	6.84807	7.3

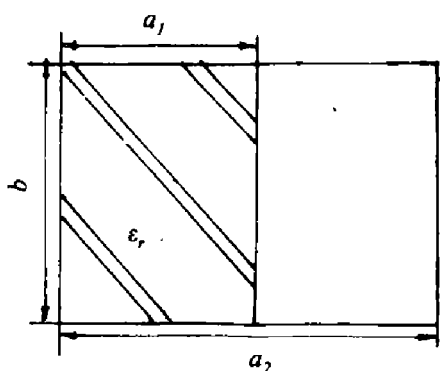


图 2 条形介质填充矩形波导
Fig. 2 Slab-loaded rectangular waveguide

和计算值的比较. 由表 1 可见, 二次边缘元的计算精度比一次边缘元约高出一个数量级. 图 3 和图 4 分别给出了块状介质填充矩形波导和衬底基片为各向异性介质的微带线主模的色散曲线, 及与其它计算结果的比较. 对于这些即使结构较为复杂或介质材料为各向异性的导波结构, 我们在用二次边缘元计算时, 边缘节点数在不到 150 个的情况下所得的计算值已与用其它方法求得的结果吻合得很好. 图 4 给出了文献 [4] 用一次边缘元计算的结果. 其结果与本文使用的节点数 ($N_s=573$) 相比, 约为本文节点数的 4 倍. 由此可见, 本文提出的二次边缘元方法不仅适用范围广, 计算精度高而且有很高的计算效率.

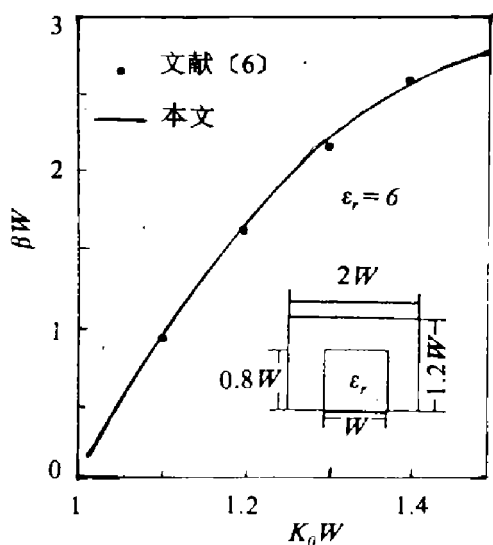


图 3 块状介质填充波导的传播特性
Fig. 3 Propagation characteristics of the block-loaded waveguide

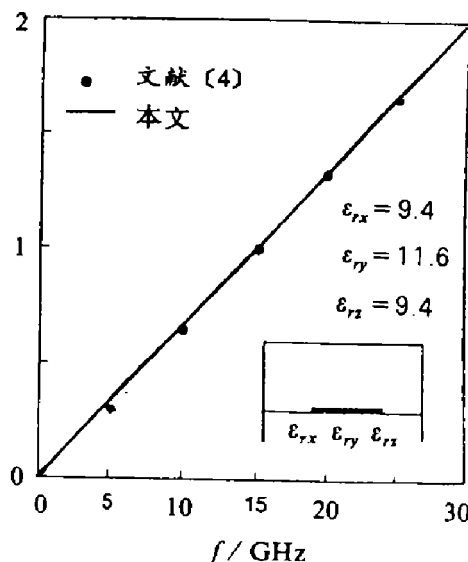


图 4 各向异性介质微带线的传播特性
Fig. 4 Propagation characteristics of the microstrip with anisotropic substrate

参考文献

1 Konrad A. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1976,24(9):553~559
2 Rahman B M A et al. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1984,32(1):20~28

- 3 Koshiha M *et al.* *Electron. Lett.*, 1984, **20**(5):409~410
- 4 Koshiha M *et al.* *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1992, **40**(2):371~377
- 5 徐善驾, 彭松村. *通信学报*, 1985, **6**(4):62~69
- 6 Schlosser W. *Advance in Microwave*, New York: Academic Press, 1966

A NEW HIGH-ORDER EDGE-ELEMENT APPROACH*

Xu Shanjia Sheng Xinqing

(*Department of Electronic Engineering and Information Science, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China*)

Masanori Koshiha

(*Department of Electronic Engineering, Hokkaido University, Sapporo, 060 Japan*)

Abstract A new high-order edge-element approach is discussed. This method not only eliminates the spurious solutions but also possesses the characteristics of simplicity and high efficiency. The emphasis is laid on the investigation of the space construction of the second-order edge-element approach and the related formulations are given. The computations of the eigenvalues of the dominant and the higher-order modes in the slab-loaded waveguide show that the accuracy of the second-order edge-element approach is about one order higher than that of the first-order edge-element approach. The calculations of the dispersion curves for the dominant mode in the block dielectric loaded rectangular waveguide and in the microstrip line with anisotropic substrate verify the accuracy and the extensive suitability of the present method.

Key words finite-element, high-order edge-element, anisotropic, dispersion.

*The project supported by the National Natural Science Foundation of China.